Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Zum Themenbereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie wird in der Fachdidaktik eine Vielzahl sehr unterschiedlicher algebraischer und geometrischer Inhalte gezählt, die auf vielfältige Weise zueinander in Beziehung stehen und miteinander verflochten sind, zum Beispiel: Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme, Matrizen und Vektoren in Anwendungen, Untersuchung geometrischer Gebilde im Raum, affine Abbildungen. Alle diese Aspekte und ihre gegenseitigen Bezüge im Unterricht thematisieren zu wollen, würde bei weitem den zeitlichen Rahmen übersteigen, der für den Themenbereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie zur Verfügung steht. Andererseits würde es eine unnötige Einengung bedeuten, die Lehrerinnen und Lehrer auf eine bestimmte didaktische und inhaltliche Schwerpunktsetzung festzulegen.

Um den Lehrerinnen und Lehrern einen möglichst großen Spielraum für didaktische Entscheidungen einzuräumen, werden **zwei Wahlpflichtgebiete** angeboten. Beiden gemeinsam ist ein Grundbestand an algebraischen und geometrischen Inhalten und Verfahren. Jedoch wird jeweils ein anderer Schwerpunkt gesetzt, was auch Unterschiede bei der Stoffauswahl nach sich zieht. In den Vorbemerkungen zu den Wahlpflichtgebieten sind die jeweiligen didaktischen Intentionen dargestellt.

In jedem Kurs muss **eines** der beiden **Wahlpflichtgebiete** vollständig behandelt werden. Über die Inhalte des ausgewählten Wahlpflichtgebiets hinaus können weitere Themen zusätzlich im Rahmen des pädagogischen Freiraums angesprochen werden.

Wahlpflichtgebiet A1:
Matrizen in praktischen Anwendungen

Zeitrichtwert: 44 Unterrichtsstunden*

Zu dem beiden Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren. Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Hilfsmittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele innermathematische Fragestellungen führen auf lineare Gleichungssysteme.

Im Mittelpunkt dieses Wahlpflichtgebiets steht das Arbeiten mit Matrizen. Dies ist für Schülerinnen und Schüler eines Grundkurses nützlich, weil Matrizen in zahlreichen Berufszweigen und angewandten Wissenschaften zur Modellierung und Lösung von Sachproblemen genutzt werden. Der Schwerpunkt bei diesem Wahlpflichtgebiet liegt auf dem Mathematisieren von Sachproblemen und nicht auf dem Erlernen und Einüben des Matrizenkalküls. Die einzelnen Matrizenoperationen werden anhand konkreter Sachaufgaben, z.B. aus der Industrie oder Wirtschaft, erarbeitet und dann in komplexeren Problemstellungen angewendet.

Es wird empfohlen, das für die Berufspraxis und das Studium so wichtige Lösen von linearen Gleichungssystemen in engem Bezug zu der anwendungsorientierten Erarbeitung der Matrizenoperationen zu behandeln. Schließlich sollen die Schülerinnen und Schüler an ausgewählten Beispielen erkennen, dass sich Matrizen auch zur Beschreibung geometrischer Abbildungen eignen und so die vielseitige Bedeutung von Matrizen erfahren.

Ziele / Inhalte (Sach – und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen (1.01g)	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, beim Invertieren von Matrizen, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen (1.02g)	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden. Wenn auch die Behandlung des Gauß-Algorithmus nicht verbindlich ist, wird dennoch empfohlen, exemplarisch einen Einblick in dieses Verfahren zu geben, und zwar unter dem Aspekt, einen Lösungsalgorithmus für Gleichungssysteme zu finden, den man auf den Computer übertragen kann.
3. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren (3.01g, 3.02g)	Der Vektorbegriff umfasst hier vor allem Zahlen-n-Tupel. Ortsvektoren und Pfeilklassen können im Zusammenhang mit den geometrischen Abbildungen behandelt werden.
4. In Sachzusammenhängen folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und ausführen: ▪ Produkt einer Matrix mit einem Vektor (1.05g)	 Möglicher Sachbezug: ▪ Tabellen und Listen und deren Verknüpfungen; z.B. Berechnungen von Stückzahlen und Kosten

▪ Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen (1.05g, 1.06e)	Möglicher Sachbezug: ▪ Materialverteilungen, etwa bei einem mehrstufigen Produktionsablauf ▪ Markow-Prozesse; z.B. bei der Untersuchung des Kaufverhaltens von Kund
▪ Inverse Matrix (1.05g)	Möglicher Sachbezug: ▪ Umkehrung der Fragestellung beim Verknüpfen von Tabellen und Listen ▪ Innerbetriebliche Verrechnungen ▪ Stücklistenproblem
5. Komplexere Aufgaben aus mindestens zwei Anwendungsfeldern von Matrizen bearbeiten (1.04g, 1.05g, 1.06e, 1.07e)	Beispiele für Anwendungsfelder, die auf komplexere Aufgaben führen: – Input-Output-Analysis (Leontief-Modell) – Prozesse, die durch Übergangsmatrizen beschrieben werden können – Populationsentwicklung, Warteschlangen, Kaufverhalten, Maschinenüberwachung, Irrfahrtmodelle Dabei sollen auch stationäre Verteilungen und Grenzverteilungen exemplarisch angesprochen werden. Der Schwerpunkt muss auf der Bearbeitung des Sachproblems, nicht auf der Durchführung eines mathematischen Kalküls, liegen (vgl. Problemlösen mit mathematischen Methoden – Modellbildung). Umfangreiche Rechnungen bei Matrizenoperationen können einem Computer übertragen werden. Zur Untersuchung mehrstufiger Prozesse, die durch eine Verkettung von Matrizen beschrieben werden, können auch geeignete Modellbildungs- und Simulationsprogramme genutzt werden.
6. Erfahren, dass Matrizen auch zur Beschreibung von geometrischen Abbildungen dienen (1.04g, 1.05g, 1.06e, 1.07e)	Hier kann es nicht um eine systematische Einführung in die analytische Abbildungsgeometrie gehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen vielmehr exemplarisch erfahren, dass Matrizen und Vektoren auch in der Geometrie eine wichtige Bedeutung zukommt. Dabei sollten auch die behandelten Operationen mit Matrizen geometrisch gedeutet werden (Verkettung von Abbildungen, Umkehrabbildung).

	Es wird empfohlen, vor allem die Abbildungen zu wählen, die den Schülerinnen und Schülern aus dem Geometrieunterricht der Sekundarstufe I bekannt sind (z.B. Kongruenzabbildungen mit Fixpunkt O oder die zentrische Streckung vom Ursprung aus). An mindestens einem (einfachen) Beispiel sollte auch einmal eine 3x3-Matrix abbildungsgeometrisch interpretiert werden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Wahlpflichtgebiet A2:
Geraden und Ebenen im Raum

Zeitrichtwert: 44 Unterrichtsstunden*

Zu dem beiden Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren.
Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Hilfsmittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele innermathematische Fragestellungen führen auf lineare Gleichungssysteme. In diesem Wahlpflichtgebiet werden Fähigkeiten im Lösen von linearen Gleichungssystemen und Interpretieren von Lösungen, auch bei unter- oder überbestimmten Systemen, vor allem dazu benötigt, Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen analytisch zu klären. Darüber hinaus sollen auch Anwendungsaufgaben aus verschiedenen Sachgebieten, die auf lineare Gleichungssysteme führen, gelöst werden.

Im Mittelpunkt des Wahlpflichtgebiets stehen die Erarbeitung der vektoriellen Geraden- und Ebenengleichung und die Untersuchung von Lagebeziehungen. Hinzu kommt das Ziel, das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler durch Zeichnen von Geraden und Ebenen zu fördern. Schließlich trägt die Beschreibung von Ebenen durch Koordinatengleichungen der Tatsache Rechnung, dass Ebenen und Geraden in naturwissenschaftlich-technischen Studiengängen vielfach durch Koordinatengleichungen und nicht durch Parametergleichungen dargestellt werden.
Die geometrische Interpretation der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme schlägt eine Brücke zu den behandelten Lagebeziehungen von Ebenen im Raum.

Ziele / Inhalte (Sach – und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen (1.01g)	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, bei der Untersuchung der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen (1.02g)	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden. Wenn auch die Behandlung des Gauß-Algorithmus nicht verbindlich ist, wird dennoch empfohlen, exemplarisch einen Einblick in dieses Verfahren zu geben, und zwar unter dem Aspekt, einen Lösungsalgorithmus für Gleichungssysteme zu finden, den man auf den Computer übertragen kann.
3. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren (3.01g, 3.02g) 4. Den Begriff "Linearkombination" kennen und anwenden (3.02g. 3.04g) 5. Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen (3.04g, 3.06e)	Der Vektorbegriff umfasst hier Ortsvektoren, Pfeilklassen und Zahlentripel/-paare.
6. Die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im Raum bestimmen (3.05g, 3.06e)	Es sollen die Fälle "Gerade – Gerade", "Gerade – Ebene" und, exemplarisch, "Ebene – Ebene" untersucht werden. Die Lagebeziehungen "Gerade – Ebene" und "Ebene – Ebene" können auch nach Einführung der Normalengleichung der Ebene behandelt werden.

7. Die Lage gegebener Geraden und Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen (3.01g, 3.05g, 3.06e)	Eine Beschränkung auf einfache Fälle ist möglich. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass das Einzeichnen von geeigneten Ausschnitten der Koordinatenebenen, das Markieren von Spurpunkten und Spurgeraden sowie das Beachten verdeckter Punkte und Linien den räumlichen Eindruck wesentlich verbessern. Zur Motivation und zur Unterstützung der Raumanschauung empfiehlt sich der Einsatz von Unterrichtssoftware, die Geraden und Ebenen im Koordinatensystem darstellt.
8. Das Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmen und in geometrischen Fragestellungen anwenden (2.01g, 3.03g, 3.04g)	Unter geometrischen Anwendungen werden z.B. verstanden: – Berechnung von Winkeln – Prüfen von Orthogonalität – Bestimmen orthogonaler Vektoren – Beweise elementargeometrischer Sätze.
9. Die allgemeine Normalengleichung der Ebene kennen und anwenden (3.05g)	
10. Wissen und begründen, dass eine Koordinatengleichung mit drei Variablen eine Ebene beschreibt und die vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen bekannten Fälle „eine Lösung“, „keine Lösung“ oder „unendlich viele Lösungen“ geometrisch deuten	

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Stochastik 1

Zeitrichtwert: 26 Unterrichtsstunden*

Der Themenbereich ist für den Grundkurs von Bedeutung, weil er in besonderer Weise die Möglichkeit bietet, die Beschreibung von Anwendungssituationen durch mathematische Modelle zu üben; dabei sollen auch Grenzen der Modelle erkannt werden.

Zentrales Anliegen des Themenbereichs ist es, die Schülerinnen und Schüler mit Denkweisen und Verfahren der Stochastik vertraut zu machen. Aufbauend auf den BS der Sek I wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff vertieft. Im Mittelpunkt steht die Binomialverteilung.

Bei der Planung und Durchführung von Simulationen mit Hilfe von Zufallszahlen (Monte-Carlo-Methode) erfahren die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung dieser Arbeitsmethode, die in verschiedenen Studiengängen und Berufsfeldern eine zunehmend größere Rolle spielt.

Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf Fragestellungen aus der beurteilenden Statistik.
Der Lehrplan weist zwei Wahlpflichtgebiete (Schätzen von Parametern, Testen von Hypothesen) aus, von denen eines verbindlich zu behandeln ist.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Zufallsexperimente durch ihre Ergebnismengen beschreiben	
2. Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren (5.02g, 5.03g, 4.12g)	Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3. Einfache Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen anwenden (5.02g)	z.B. Pfadregeln (Summe, Produkt), Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses

4. Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit anhand einfacher Beispiele untersuchen (5.03g)	
5. Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallszahlen simulieren und die Ergebnisse der Simulation interpretieren (5.05g)	Für die Durchführung der Simulationen sollte der Computer benutzt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass Simulationen dort sinnvoll eingesetzt werden, wo eine wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung nicht möglich oder zu komplex ist. Im Unterricht können durch Simulationen auch wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen und Formeln vorbereitet oder bestätigt werden.
6. Die Begriffe "Bernoullikette" und "Binomialverteilung" verstehen und wissen, wie man die Werte einer Binomialverteilung bestimmen kann (5.04g)	Eine explizite Berechnung der Werte der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. Die Herleitung der entsprechenden Formel ist nicht gefordert. Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden Tabellen für die Binomialverteilung benutzt. Binomialverteilungen sollen auch grafisch dargestellt werden (Histogramme).
7. Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen (5.04g)	Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass viele Zufallsexperimente im täglichen Leben durch eine Binomialverteilung ausreichend gut modelliert werden können.
8. Erwartungswert und Standardabweichung für Binomialverteilungen berechnen und anwenden (2.06g, 2.07g, 5.01g, 5.04g)	Die Formeln sollen anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden. Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die Schülerinnen und Schüler verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann. Hier bietet es sich an, exemplarisch eine statistische Erhebung zu planen und zu beurteilen.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Stochastik 2

Wahlpflichtgebiet B1:
Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Zeitrichtwert: 16 Unterrichtsstunden*

Zentrales Anliegen des Wahlpflichtgebiets "Schätzen von Wahrscheinlichkeiten" ist es, dass die Schülerinnen und Schüler das Verfahren zur Bestimmung von Konfidenzintervallen verstehen und zum Lösen von Sachproblemen aus unterschiedlichen Bereichen anwenden. Dabei erfährt der Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Erweiterung und Vertiefung.
Als Voraussetzung wird eine Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise zu ermitteln, bereitgestellt.

Ziele / Inhalte (Sach – und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Verstehen, wie man Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise mit Hilfe der Gaußschen Integralfunktion Φ (Standard-Normalverteilung) bestimmt (5.09e, 5.10e)	Die Möglichkeit der Approximation soll anschaulich, z.B. anhand von Histogrammen, einsichtig gemacht werden. Hierfür empfiehlt sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms. Die Bestimmung der Näherungswerte erfolgt mit Hilfe von Tabellen oder Rechnern.
2. Den Begriff "Konfidenzintervall" verstehen und wissen, wie man ein Konfidenzintervall für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit bestimmt (5.07e)	
3. Den Zusammenhang zwischen dem Stichprobenumfang und der Länge des Konfidenzintervalls verstehen (5.06g, 5.07e)	
4. Sachaufgaben zu Konfidenzintervallen lösen und die Ergebnisse interpretieren (5.06g, 5.07e)	

* Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Wahlpflichtgebiet B2:
Testen von Hypothesen

Zeitrichtwert: 16 Unterrichtsstunden*

Zentrales Anliegen des Wahlpflichtgebiets “Testen von Hypothesen” ist es, dass die Schülerinnen und Schüler das Verfahren verstehen und zum Lösen von Sachproblemen aus unterschiedlichen Bereichen anwenden. Im Zusammenhang mit der Diskussion von Fehlerwahrscheinlichkeiten erfährt der Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Erweiterung und Vertiefung.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Das Vorgehen beim Testen von Hypothesen verstehen (5.08e)	
2. Verstehen, welche Fehlentscheidungen beim Hypothesentest auftreten können und wissen, wie man die Wahrscheinlichkeiten dafür ermittelt (5.08e)	
3. Sachaufgaben zum Testen von Hypothesen lösen und die Ergebnisse interpretieren (5.08e)	Die Sachprobleme werden so vorgegeben, dass sie durch Binomialverteilungen modelliert werden können. Besondere Bedeutung kommt der Interpretation des Ergebnisses eines Hypothesentests zu. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler auch die Grenzen des Verfahrens erkennen. Zumindest einmal sollen die Schülerinnen und Schüler zu einem offen formulierten Sachproblem einen Hypothesentest entwerfen, gesuchte Größen berechnen und die Konsequenzen der Ergebnisse für den Sachverhalt erörtern. Die im Grundkurs hierfür angemessene Unterrichtsform ist in der Regel das Unterrichtsgespräch oder die angeleitete Gruppenarbeit.

* Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Leistungsfach

Wiederholung von Grundlagen

In der Einführungsphase kann es sich als erforderlich erweisen, gezielt bestimmte Kenntnisse und Fertigkeiten aus der Sekundarstufe I zu wiederholen und wieder verfügbar zu machen. Dies wird vor allem dann der Fall sein, wenn Schülerinnen und Schüler aus verschiedenen Lerngruppen oder mit unterschiedlichem Bildungsgang in einem Kurs zusammenkommen.

Dringend empfohlen wird, die Wiederholung in den laufenden Unterricht zu integrieren und nicht mit dem Auffrischen bekannter Inhalte zu beginnen. Es hat sich bewährt, zu Beginn der Jahrgangsstufe 11 ein Thema zu wählen, das für alle Schülerinnen und Schüler neu ist und deshalb Interesse und Motivation wecken kann.

In bestimmten Fällen kann es aber auch sinnvoll oder notwendig sein, zu Beginn der Jahrgangsstufe 11 Grundlagen für das weitere unterrichtliche Arbeiten bereitzustellen. Bei der Planung einer solchen Wiederholungsphase sollte allerdings folgendes beachtet werden:

- Die Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler sollte im Vordergrund stehen.

- Der Zeitansatz sollte insgesamt 6 - 8 Unterrichtsstunden nicht überschreiten.

- Der Stoffumfang soll auf ein Minimum beschränkt sein.

Folgende Inhalte werden empfohlen:
- Lösen von linearen Gleichungen, quadratischen Gleichungen und linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen
- Definition des Funktionsbegriffs und Darstellungen von Funktionen
- Lineare und einfache quadratische Funktionen.

Die Wiederholung weiterer Funktionsklassen und der Eigenschaften von Funktionen soll erst dann erfolgen, wenn diese im Rahmen weiterführender Untersuchungen (z.B. im Rahmen der Differentialrechnung) angesprochen werden. (4.01g, 4.02g)

Grenzwerte

Zeitrichtwert: 18 Unterrichtsstunden*

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, eine inhaltliche Vorstellung des Grenzwertbegriffs bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken, eine ihrer Leistungsfähigkeit angemessene Präzisierung der Definition zu erreichen und sie zu befähigen, Grenzwerte zu bestimmen.

Der Lehrplan ermöglicht verschiedene Zugänge zum Grenzwertbegriff:
Der Grenzwertbegriff kann anhand reeller Funktionen ohne vorherige Behandlung von Zahlenfolgen erarbeitet werden. Bei diesem Vorgehen wird der Folgengrenzwert zu einem späteren Zeitpunkt in einem geeigneten Zusammenhang, z.B. bei der Betrachtung des Grenzwerts für $x \to x_o$, angesprochen, damit er für Anwendungen und zum weiteren Aufbau der Analysis (etwa für die Einführung der Integralrechnung) zur Verfügung steht.

Ein anderer Weg über Zahlenfolgen baut auf Vorkenntnissen aus der Sekundarstufe I auf. An eine extensive Behandlung von Zahlenfolgen und deren Eigenschaften ist nicht gedacht. Da sich rekursive Folgen in besonderer Weise eignen, ein Verständnis des Grenzwertbegriffs zu entwickeln, und ferner Rekursionen in den Anwendungen der Mathematik eine immer größere Bedeutung gewinnen, ist ein Eingehen auf diese Folgen im Unterricht ausdrücklich gefordert.

Im Zusammenhang mit der Reflexion über Grenzprozesse können historische Aspekte (Ringen um eine Präzisierung grundlegender Begriffe) und philosophische Ausblicke (Erfahrungen mit dem Infiniten) in den Unterricht einbezogen werden. Es bieten sich aber auch Beispiele aus der fraktalen Geometrie (Kochkurve, Sierpinsky-Dreieck,...) an.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Die explizite und rekursive Beschreibung von Zahlenfolgen verstehen und Eigenschaften von Zahlenfolgen kennen	Die Schülerinnen und Schüler sollen zu vorgegebenem Bildungsgesetz Folgenglieder bestimmen und umgekehrt in einfacheren Fällen ein Bildungsgesetz angeben können.
2. In einfachen Fällen Monotonie und Beschränktheit von Folgen bzw. reellen Funktionen beweisen	
3. Die Begriffe “Grenzwert einer Folge” und “Grenzwert einer reellen Funktion für $x \to \pm\infty$” verstehen	
4. Den Begriff “Grenzwert einer reellen Funktion für für $x \to x_0$ ” verstehen und zur Beschreibung der lokalen Stetigkeit einer Funktion verwenden	Es empfiehlt sich eine Einführung des Begriffes “Grenzwert für für $x \to x_0$ ” über Folgen. An eine ausführliche Behandlung der Stetigkeit ist nicht gedacht.
5. Die Grenzwertsätze für Summe, Produkt und Quotient von Folgen und reellen Funktionen kennen und einen Grenzwertsatz beweisen	
6. Grenzwerte bestimmen	Im Vordergrund steht die Anwendung der Grenzwertsätze. An einigen Beispielen sollte der Grenzwert unter Rückgriff auf die entsprechende Definition bestätigt werden.

* Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Differentialrechnung

Zeitrichtwert: 45 Unterrichtsstunden*

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, bei den Schülerinnen und Schülern eine anschauliche Vorstellung vom Differentialquotienten aufzubauen, Folgerungen aus der Definition zu ziehen und die gewonnenen Aussagen in verschiedenen Sachbezügen anzuwenden.

Der Differentialquotient kann ausgehend von der Frage nach Änderungsraten im Rahmen eines Sachproblems oder von einer geometrischen Problemstellung (Tangentenproblem) erarbeitet werden. Der Grenzwertbegriff soll dabei eine Anwendung und Vertiefung erfahren. Mit dem Differentialquotienten und der Technik des Ableitens lernen die Schülerinnen und Schüler ein wirkungsvolles Werkzeug kennen, das es gestattet, funktionale Zusammenhänge und deren Eigenschaften in den Anwendungsbereichen Naturwissenschaften, Technik, Umwelt, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zu untersuchen und zu deuten.

Ziele / Inhalte (Sach – und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Den Begriff "Ableitung an einer Stelle" verstehen (1.03g, 2.02g, 4.03g)	Die Ableitung kann als Grenzwert von Sekantensteigungen eingeführt werden. Gleichwertig sind Zugänge über Linearisierung und Änderungsraten möglich.
2. Die Ableitung als momentane Änderungsrate interpretieren (2.03g, 4.03g, 4.13e)	Im Hinblick auf die zentrale Bedeutung des Differentialquotienten sollen die Schülerinnen und Schüler verschiedene geometrische und nicht-geometrische Interpretationen kennen.
3. Die Begriffe „differenzierbar“ und „Ableitungsfunktion“ verstehen (4.04g)	Es sollen auch Beispiele für nicht überall differenzierbare Funktionen betrachtet werden. Ferner soll der Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit erkannt werden.
4. Faktor-, Summen- und Potenzregel kennen, anwenden und eine der Regeln beweisen (4.05g, 4.06g)	Weitere Ableitungsregeln sollen erst dann behandelt werden, wenn es das entsprechende Funktionenmaterial erforderlich macht.
5. Zu einer vorgegebenen Funktion die Ableitungsfunktion und höhere Ableitungen bestimmen (4.04g, 4.05g, 4.06g)	Zur Ableitung ganzrationaler Funktionen werden die Ableitungsregeln angewendet. Den Schülerinnen und Schülern soll aber auch bewusst werden, dass die Ableitungsfunktion einer nicht-ganzrationalen Funktion nur unter Rückgriff auf den Differentialquotienten bestimmt werden kann.

6. Den Graphen der Ableitungsfunktion zu einem vorgegebenen Funktionsgraphen skizzieren und umgekehrt (4.08g)	Der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms wird empfohlen, um den Zusammenhang zwischen den beiden Graphen an unterschiedlichen Funktionen anschaulich erfahrbar zu machen. Dieser Lehrplan und die Bildungsstandards betonen dies im Vorwort ausdrücklich.
7. Notwendige und hinreichende Kriterien für Monotonie und für die Existenz von Extrema und Wendepunkten anschaulich begründen und einzelne Kriterien beweisen (4.07g)	
8. Ganzrationale Funktionen untersuchen, auch solche mit Parametern (4.05g – 4.08g)	Es genügen wenige charakteristische Beispiele. Zu bevorzugen sind Beispiele in Anwendungszusammenhängen und solche von Funktionen mit Parametern. Funktionsplotprogramme mit speziellen Optionen (z.B. Zoom, Trace) werden empfohlen. Die Aufgabenstellungen zur Funktionsuntersuchung müssen dann entsprechend angepasst sein.
9. Funktionsgleichungen ganzrationaler Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften bestimmen	Es genügen einige charakteristische Beispiele.
10. Extremwertaufgaben aus verschiedenen Anwendungsgebieten lösen	
11. Ein Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung verstehen und anwenden	Es geht vor allem darum, den Prozess der Iteration und den zugrundeliegenden Algorithmus bewusst zu machen. Die Schülerinnen und Schüler sollten auch ein entsprechendes Computerprogramm erstellen oder analysieren und exemplarisch Nullstellen mit dem Programm bestimmen.

* Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Integralrechnung

Zeitrichtwert: 30 Unterrichtsstunden*

Für den Zugang zur Integralrechnung sind verschiedene methodische Wege möglich. Sie führen u.U. zu verschiedenen Definitionen des bestimmten Integrals. Die folgenden Ziele legen keinen Weg fest. Welche Definition auch gewählt wird, den Schülerinnen und Schülern soll bewusst werden, dass diese Definition die Grundlage für weitere Begründungen und Beweise bildet.

Ziele / Inhalte (Sach – und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Flächeninhalte unter Funktionsgraphen mit Hilfe von Rechtecksummen bestimmen (1.03g, 2.04g)	
2. Eine Definition des Integralbegriffs verstehen (4.09g)	Wie der Integralbegriff im Unterricht definiert wird, hängt vom gewählten Weg ab. Das bestimmte Integral kann insbesondere auch als (re)konstruierter Bestand gedeutet werden. Eigenschaften des Integrals sollen an geeigneten Stellen bewusst gemacht und ggf. mit Hilfe der Definition begründet werden.
3. Faktor-, Summen- und Potenzregel kennen, begründen und zur Berechnung von Integralen anwenden (4.11g)	Diese Regeln können auch vor dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung behandelt werden. Der Beweis der Potenzregel kann in diesem Fall zurückgestellt werden.
4. Die Definitionen von „Integralfunktion“ und „Stammfunktion“ verstehen (4.10g, 4.11g)	Der Unterschied zwischen Integralfunktion und Stammfunktion soll an geeigneten Beispielen erläutert werden.
5. Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dessen Beweis verstehen (4.10g)	

6. Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen (4.11g)	
7. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Integralen verstehen	Der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms wird empfohlen.
8. Sachaufgaben, die auf Integrale führen, lösen (2.05g) Das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die x-Achse entstehen (2.09e)	Die Anwendungsaufgaben sollen aus verschiedenen Sachzusammenhängen stammen. Beispiele: – Flächeninhalte – Arbeit aus Kraft und Weg – Weg aus Geschwindigkeit und Zeit – Volumen aus Strömungsstärke und Zeit – Volumen von Rotationskörpern – Bogenlänge Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass die Integralrechnung allgemein bei Problemen angewendet werden kann, zu deren Lösung der Grenzwert einer Summe von Produkten bestimmt werden muss.

* Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Weiterführung
der Differential- und Integralrechnung

Zeitrichtwert: 60 Unterrichtsstunden*

In den vorangegangenen Themenblöcken zur Analysis war es ein zentrales Anliegen, die Schülerinnen und Schüler mit den Denkweisen und den grundlegenden Verfahren der Differential- und Integralrechnung vertraut zu machen. In diesem Abschnitt werden weitere Ableitungs- und Integrationsregeln bereitgestellt und die Methoden der Infinitesimalrechnung auf ein erweitertes Funktionenmaterial angewendet.
Differentialgleichungen sollen im Unterricht wegen des weitverzweigten Anwendungsbezugs nicht zu knapp behandelt werden. Dennoch ist ein exemplarisches, auf grundsätzliches Verständnis zielendes Vorgehen intendiert; an eine systematische Behandlung ist nicht gedacht. Die numerischen Lösungsverfahren haben durch den Computer eine immer größere Bedeutung erlangt. Daher sollen die Schülerinnen und Schüler auch ein einfaches numerisches Verfahren kennenlernen.
Die Ziele zur Exponential- und Logarithmusfunktion können auf verschiedenen didaktischen Wegen realisiert werden. Die Formulierung der Ziele hält eine Entscheidung offen, welcher Weg gewählt wird. Die Anordnung der Ziele soll auch hier keine Reihenfolge im Sinne eines Lehrgangs festlegen.

Ziele / Inhalte (Sach – und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Produkt-, Quotienten- und Kettenregel anwenden und eine der Regeln beweisen (4.06g, 4.14e)	
2. Gebrochen-rationale Funktionen untersuchen	Es genügen wenige charakteristische Beispiele. Geeignete Computerprogramme sind sehr zu empfehlen. In diesem Fall müssen die Aufgabenstellungen entsprechend angepasst sein.
3. Die Ableitungen von Sinus, Kosinus und Tangens kennen, anwenden und die Herleitung verstehen (4.05g)	
4. Eine Definition der Eulerschen Zahl e kennen (4.15e)	
5. Die Ableitung der e-Funktion kennen und begründen (4.15e)	
6. Den Zusammenhang zwischen den Funktionen ln(x) und 1/x kennen und die entsprechenden Beweise verstehen (4.15e)	

7. Exponentialfunktionen ableiten (4.15e)	Der Zusammenhang zwischen einer allgemeinen Exponentialfunktion und der e- Funktion sollte hier bewusst gemacht und angewendet werden.
8. Sachaufgaben, die auf Exponentialfunktionen – auch solche mit Parametern – führen, lösen (4.15e)	Auf Idealisierungen bei der Annahme exponentiellen Wachstums bzw. Zerfalls soll im Rahmen der vorgelegten Probleme besonders eingegangen werden (Modellbildung). Im Rahmen des pädagogischen Freiraums können in diesem Zusammenhang auch lineare und logistische Wachstumsprozesse betrachtet werden.
9. Die Verfahren der Integration durch Substitution und der partiellen Integration anwenden	Der Zusammenhang mit der Produkt- und Kettenregel der Differentialrechnung soll aufgezeigt werden. Obwohl in den naturwissenschaftlich-technischen Studiengängen nach wie vor Grundfertigkeiten auf diesem Gebiet erwartet werden, ist eine Beschränkung auf einfache Fälle angezeigt.
10. Beispiele für Differentialgleichungen und deren Lösung angeben und erklären	Beispiele, die sich aus dem Unterricht ergeben können, sind Wachstumsvorgänge (exponentiell, beschränkt, logistisch) und Schwingungsvorgänge.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Zum Themenbereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie wird in der Fachdidaktik eine Vielzahl sehr unterschiedlicher algebraischer und geometrischer Inhalte gezählt, die auf vielfältige Weise zueinander in Beziehung stehen und miteinander verflochten sind, zum Beispiel: Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme, affine Abbildungen, Matrizen und Vektoren in Anwendungen, Untersuchung geometrischer Gebilde im Raum. Alle diese Aspekte und ihre gegenseitigen Bezüge im Unterricht thematisieren zu wollen, würde bei weitem den zeitlichen Rahmen übersteigen, der für den Themenbereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie zur Verfügung steht. Andererseits würde es eine unnötige Einengung bedeuten, die Lehrerinnen und Lehrer auf eine bestimmte didaktische und inhaltliche Schwerpunktsetzung festzulegen.

Um den Lehrerinnen und Lehrern einen möglichst großen Spielraum für didaktische Entscheidungen einzuräumen, werden zwei Wahlpflichtgebiete angeboten. Beiden gemeinsam ist ein Grundbestand an algebraischen und geometrischen Inhalten und Verfahren. Jedoch wird jeweils ein anderer Schwerpunkt gesetzt, was auch Unterschiede bei der Stoffauswahl nach sich zieht. In den Vorbemerkungen zu den Wahlpflichtgebieten sind die jeweiligen didaktischen Intentionen dargestellt.

In jedem Kurs muss eines der beiden Wahlpflichtgebiete vollständig behandelt werden. Über die Inhalte des ausgewählten Wahlpflichtgebiets hinaus können weitere Themen zusätzlich im Rahmen des pädagogischen Freiraums angesprochen werden.

Wahlpflichtgebiet A1:
Vektoren und Matrizen

Zeitrichtwert: 75 Unterrichtsstunden*

Zu dem beiden Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren.
Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Hilfsmittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele innermathematische Fragestellungen führen auf lineare Gleichungssysteme. Der Schwerpunkt des Unterrichts zu diesem Thema liegt auf Anwendungsaufgaben. Darüber hinaus soll aber auch das für die Berufspraxis und das Studium vieler Fachrichtungen so wichtige Verständnis für Fragen der Lösbarkeit von Gleichungssystemen vertieft werden.

Im Mittelpunkt dieses Wahlpflichtgebiets steht die Anwendung von Matrizen in sehr unter- schiedlichen Bereichen. Es werden zwei gleichrangige Schwerpunkte gesetzt:

- Untersuchung affiner Abbildungen und ihrer Eigenschaften
- Mathematisierung und Lösung von nichtgeometrischen Sachproblemen.

Ein dem Leistungskurs angemessenes Anforderungsniveau wird dadurch erreicht, dass einerseits Eigenschaften der Abbildungen bewiesen und die affinen Abbildungen nach verschiedenen Gesichtspunkten (Invarianten, Fixelemente) untersucht werden, andererseits bei den Sachproblemen der Prozess der Modellbildung herausgestellt wird.

Ziele / Inhalte (Sach – und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
Lineare Gleichungssysteme	
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen (1.01g)	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen (1.02g)	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden.
3. Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen (1.01g, 1.02g)	Der Gauß-Algorithmus wird nicht als ein weiteres Verfahren eingeführt, mit dem die Schülerinnen und Schüler Gleichungssysteme lösen sollen. Im Vordergrund steht viel mehr das Bewusstsein eines Algorithmus, der so beschaffen ist, dass man ihn auf den Computer übertragen kann.
4. Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren (1.01g, 1.02g)	Neben Sachaufgaben sollen auch Beispiele aus anderen Gebieten, z.B. Analysis (Bestimmung von Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften →Kurvenscharen) herangezogen werden.
Vektoralgebra	
5. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren (3.01g, 3.02g)	Der Vektorbegriff umfasst hier Zahlen-n-Tupel, Ortsvektoren und Pfeilklassen.
6. Die Begriffe „Linearkombination“ und „linearabhängig/unabhängig“ verstehen und anwenden (3.02g)	

7. Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen (2.01g, 3.03g)	Geometrische Vektoren stehen im Vordergrund.
8. Geeignete elementargeometrische Sätze mit vektoriellen Methoden beweisen	Hier sollen vor allem die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit und das Skalarprodukt angewendet werden.
Matrizen	
9. Folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und sowohl im Zusammenhang mit Abbildungen als auch in nichtgeometrischen Sachbezügen anwenden:	Im Folgenden sind jeweils mögliche Fragestellungen a) aus der Abbildungsgeometrie b) aus nichtgeometrischen Zusammenhängen angegeben.
▪ Produkt einer Matrix mit einem Vektor (1.05g)	Zu a) Berechnen von Bildpunkten bei einer vorgegebenen Abbildung Zu b) Verknüpfen von Tabellen und Listen, z.B. Berechnungen von Stückzahlen und Kosten
▪ Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen (1.05, 1.06e)	Zu a) Verketten von Abbildungen Zu b) Materialverflechtungen, etwa bei einem mehrstufigen Produktionsablauf Markow-Prozesse; z.B. bei der Untersuchung des Kaufverhaltens von Kunden
▪ Inverse Matrix (1.05g)	Zu a) Bestimmen der Umkehrabbildung zu einer gegebenen Abbildung Zu b) Umkehrung der Fragestellung beim Verknüpfen von Tabellen und Listen, Innerbetriebliche Verrechnungen In diesem Zusammenhang sollen Kenntnisse und Fertigkeiten im Umgang mit linearen Gleichungssystemen aufgefrischt und vertieft werden.
10. Die allgemeine Matrix-Vektor-Gleichung einer affinen Abbildung verstehen (1.04g, 1.05g)	Dabei soll auch die Tatsache, dass bei Abbildungen der Form $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ die Spalten der Abbildungsmatrix A die Bilder der Einheitsvektoren sind, geometrisch interpretiert werden.
11. Eigenschaften der affinen Abbildungen beweisen (1.04g, 1.05g)	Es bieten sich an: Invarianten, Fixelemente

12. Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen als spezielle affine Abbildungen verstehen (1.04g, 1.05g, 1.07e)	In diesem Zusammenhang soll auf die Invarianten der angesprochenen Abbildungen zurückgegriffen werden.
13. Affine Abbildungen nach ihren Fixelementen untersuchen (1.04g, 1.05g, 1.07e)	In diesem Zusammenhang können auch Eigenschaften der Achsenaffinitäten (perspektiven Affinitäten) einer genaueren Analyse unterzogen werden.
14. In mindestens einem nichtgeometrischen Anwendungsfeld von Matrizen Sachaufgaben lösen (1.05g)	Beispiele für Anwendungsfelder: – Stücklistenproblem, Input-Output- Analyse (Leontief-Modell) – Prozesse, die durch Übergangsmatrizen beschrieben werden können (z.B. Populationsentwicklung, Warteschlangen, Kaufverhalten, Maschinenüberwachung, Irrfahrtmodelle). In diesem Zusammenhang soll auch auf stationäre Verteilungen und Grenzverteilungen eingegangen werden. Folgende gebietsübergreifenden Bezüge können ggf. bewusst gemacht werden: Stochastische Matrizen $\longleftrightarrow$ Stochastik Grenzverteilung $\longleftrightarrow$ Analysis Umfangreiche Rechnungen bei Matrizenoperationen und beim Lösen von Gleichungssystemen können einem Computer übertragen werden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Wahlpflichtgebiet A2:
Geraden und Ebenen im Raum

Zeitrichtwert: 75 Unterrichtsstunden*

Zu dem beiden Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren.
Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Hilfsmittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele innermathematische Fragestellungen führen auf lineare Gleichungssysteme. In diesem Wahlpflichtgebiet werden Fähigkeiten im Lösen von linearen Gleichungssystemen und Interpretieren von Lösungen, auch bei unter- oder überbestimmten Systemen, vor allem dazu benötigt, Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen analytisch zu erklären. Darüber hinaus sollen auch Anwendungsaufgaben aus verschiedenen Sachgebieten, die auf lineare Gleichungssysteme führen, gelöst werden.

Im Mittelpunkt dieses Wahlpflichtgebiets “Vektorielle analytische Geometrie” stehen die Anwendung vektorieller Methoden zur Bearbeitung geometrischer Fragestellungen und, entsprechend der Zielsetzung des Leistungskurses, zum Beweis geometrischer Sätze. Hinzu kommt das Ziel, das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler durch Zeichnen von Geraden und Ebenen zu fördern.

Ziele / Inhalte (Sach – und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
Lineare Gleichungssysteme	
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen (1.01g)	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, bei der Untersuchung der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen (1.02g)	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden.

3. Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen (1.01g, 1.02g)	Der Gauß-Algorithmus wird nicht als ein weiteres Verfahren eingeführt, mit dem die Schülerinnen und Schüler Gleichungssysteme lösen sollen. Im Vordergrund steht vielmehr das Bewusstmachen eines Algorithmus, der so beschaffen ist, dass man ihn auf den Computer übertragen kann.
4. Folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und zum Lösen von Linearen Gleichungssystemen verwenden: Produkt einer Matrix mit einem Vektor, Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen, Inverse Matrix (1.05g, 1.06e)	An dieser Stelle können auch Determinanten eingeführt und mit deren Hilfe die Anzahl möglicher Lösungen der linearen Gleichungssysteme bestimmt werden.
5. Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren (1.01g, 1.02g)	Es sollen unterschiedliche Themenbereiche angesprochen werden; z.B. Sachprobleme, Geometrie (Parametergleichung der Geraden bzw. der Ebene; Lagebeziehungen), Analysis (Bestimmung von Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften Kurvenscharen).
Vektoralgebra	
6. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren (3.01g, 3.02g)	Der Vektorbegriff umfasst hier Ortsvektoren, Pfeilklassen und Zahlentripel/-paare.
7. Den Begriff “Linearkombination” und „linear abhängig/unabhängig“ verstehen und anwenden (3.02g, 3.04g)	
8. Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen (2.01g, 3.03g)	Geometrische Vektoren stehen im Vordergrund. Die Einführung kann auch nach der Behandlung der Lagebeziehungen erfolgen.
9. Geeignete elementargeometrische Sätze mit vektoriellen Methoden beweisen (3.01g, 3.02g, 3.03g, 3.04g)	Hier sollen vor allem die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit und das Skalarprodukt angewendet werden.
Analytische Geometrie	
10. Die Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen (3.04g, 3.06e)	Ausgangspunkt kann die geometrische Interpretation unterbestimmter Systeme sein.

11. Die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im Raum bestimmen und die Verfahren begründen (3.05g, 3.06e)	Es sollen die Fälle "Gerade – Gerade", "Gerade – Ebene" und "Ebene – Ebene" behandelt werden.
12. Die gegenseitige Lage gegebener Geraden und Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen (3.05g, 3.06e)	Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass das Markieren von Spurpunkten und Spurgeraden sowie das Beachten verdeckter Punkte und Linien den räumlichen Eindruck wesentlich verbessern. Zur Motivation und zur Unterstützung der Raumanschauung empfiehlt sich der Einsatz von Unterrichtssoftware, die Geraden und Ebenen im Koordinatensystem darstellt.
13. Die allgemeine und die Hessesche Normalenform der Ebenengleichung herleiten und anwenden (3.05g, 2.01g)	
14. Winkel und Abstände im Raum berechnen (2.01g, 2.08e)	
15. Die Kreis- und Kugelgleichung herleiten und zur Untersuchung von Lagebeziehungen anwenden (3.04g)	
16. Definition und Eigenschaften des Vektorprodukts kennen und anwenden (2.01g, 2.08e)	

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Stochastik

Zeitrichtwert: 70 Unterrichtsstunden*

Zentrales Anliegen dieses Themenbereichs ist es, die Schülerinnen und Schüler mit Denkweisen und Verfahren der Stochastik vertraut zu machen. Dabei steht auch im Leistungskurs der Anwendungsbezug und nicht der Aufbau einer mathematischen Theorie im Mittelpunkt.

Aufbauend auf den BS der Sek I wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff vertieft und ein Schwerpunkt auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsgrößen gelegt. Dabei beschränkt sich der Lehrgang auf diskrete Zufallsgrößen; im Mittelpunkt steht die Binomialverteilung.

Bei der Planung und Durchführung von Simulationen mit Hilfe von Zufallszahlen (Monte-Carlo-Methode) erfahren die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung dieser Arbeitsmethode, die in verschiedenen Studiengängen und Berufsfeldern eine zunehmend größere Rolle spielt.

Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf Fragestellungen aus der beurteilenden Statistik.
Dem Bestimmen von Konfidenzintervallen für unbekannte Wahrscheinlichkeiten und dem Testen von Hypothesen muss im Unterricht ausreichend Zeit eingeräumt werden. Es ist ein wichtiges Anliegen, dass die Schülerinnen und Schüler diese Verfahren nicht nur verstehen, sondern auch selbstständig zum Lösen von Sachproblemen anwenden.

Ziele / Inhalte (Sach – und Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Zufallsexperimente durch ihre Ergebnismengen beschreiben	
2. Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren (5.02g, 5.03g, 4.12g)	Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3. Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen begründen und anwenden (5.02g, 5.03g)	z.B. Pfadregeln (Summe, Produkt), Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge von Ereignissen

4. Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallszahlen simulieren und die Ergebnisse der Simulation interpretieren (5.05g)	Für die Durchführung der Simulationen sollte der Computer benutzt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass Simulationen dort sinnvoll eingesetzt werden, wo eine wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung nicht möglich oder zu komplex ist. Im Unterricht können durch Simulationen auch wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen und Formeln vorbereitet oder bestätigt werden.
5. Die Begriffe "bedingte Wahrscheinlichkeit" und "Unabhängigkeit zweier Ereignisse" kennen und anwenden (5.02g, 5.03g)	Im Rahmen des pädagogischen Freiraums sollte in diesem Zusammenhang auch der Satz von Bayes behandelt werden.
6. Die Begriffe "Zufallsgröße" und "Wahrscheinlichkeitsverteilung" kennen und an Beispielen erläutern (4.12g)	
7. Die Begriffe "Erwartungswert", "Varianz" und "Standardabweichung" einer diskreten Zufallsgröße kennen und anwenden (2.06g, 2.07g, 5.01g, 5.04g)	Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die Schülerinnen und Schüler verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann. Hier bietet es sich an, exemplarisch eine statistische Erhebung zu planen und zu beurteilen.
8. Die Begriffe "Bernoullikette", "Binomialverteilung" verstehen und die Formel zur Berechnung der Werte einer Binomialverteilung herleiten (5.04g)	Die explizite Berechnung von Werten der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden i.d.R. Rechner benutzt. Anknüpfend an vorangegangene Erfahrungen bietet es sich auch an, Bernoulliketten zu simulieren und Werte der Binomialverteilung auf diese Weise zu bestimmen.
9. Die Formeln für Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomialverteilung kennen und anwenden (5.04g)	Die Formeln können anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden; ein Beweis ist nicht gefordert.
10. Eigenschaften der Binomialverteilung kennen, begründen und anwenden (5.04g)	Zur Veranschaulichung charakteristischer Eigenschaften ist die Darstellung von Binomialverteilungen durch Histogramme hilfreich; der Einsatz geeigneter Computerprogramme wird empfohlen.

11. Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen (5.04g, 4.12g)	Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass viele Zufallsexperimente im täglichen Leben durch eine Binomialverteilung ausreichend gut modelliert werden können.
12. Verstehen, wie man Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise mit Hilfe der Gaußschen Integralfunktion Φ (Standard-Normalverteilung) bestimmt (5.09e, 5.10e)	Die Möglichkeit der Approximation soll anschaulich, z.B. anhand von Histogrammen, einsichtig gemacht werden. Hierfür empfiehlt sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms. Die Bestimmung der Näherungswerte erfolgt mit Hilfe von Tabellen oder Rechnern. Im Rahmen des pädagogischen Freiraums können darauf aufbauend die Normalverteilung definiert und Anwendungsbeispiele behandelt werden.
13. Funktionsterm, Graph und Eigenschaften der Gaußfunktion φ kennen (5.09e, 5.10e)	Der gebietsübergreifende Bezug φ- Fkt., Φ-Fkt. $\leftrightarrow$ Analysis kann bewusst gemacht werden.
14. Den Begriff "Konfidenzintervall" und das Verfahren zur Bestimmung eines Konfidenzintervalls für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit verstehen (5.07e)	
15. Den Zusammenhang zwischen dem Stichprobenumfang und der Länge des Konfidenzintervalls verstehen (5.06g, 5.07e)	
16. Sachaufgaben zu Konfidenzintervallen lösen und die Ergebnisse interpretieren (5.07e)	
17. Die Struktur des Hypothesentests verstehen (5.08e)	

18. Sachaufgaben zum Testen von Hypothesen lösen und die Ergebnisse interpretieren (5.08e)	Die Sachprobleme werden so vorgegeben, dass sie durch Binomialverteilungen modelliert werden können. Gegebenenfalls werden die Binomialverteilungen durch die Normalverteilung approximiert. Besondere Bedeutung kommt der Interpretation des Ergebnisses eines Hypothesentests zu. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler auch die Grenzen des Verfahrens erkennen. Zumindest einmal sollen die Schülerinnen und Schüler zu einem offen formulierten Sachproblem einen Hypothesentest entwerfen, gesuchte Größen berechnen und die Konsequenzen der Ergebnisse für den Sachverhalt erörtern. Im Leistungskurs soll dies weitgehend selbstständig in Gruppen- oder Partnerarbeit erfolgen.

* Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen

1. Didaktische Begründung

Damit die Schule ihren Bildungsaufgaben in vollem Umfang gerecht werden kann, muss sie zu einer sinnvollen Balance zwischen systematischem und situationsbezogenem Lernen finden. Das bedeutet, dass das Lernen in den einzelnen Fächern einerseits und fachübergreifendes bzw. fächerverbindendes Lernen andererseits unverzichtbar und konstituierende Bestandteile des Unterrichts sind.

Die Gliederung des Unterrichts in einzelne Fächer ist aus mehreren Gründen sinnvoll und notwendig. Durch die Beschränkung auf die Aspekte eines Fachs wird der Komplexitätsgrad der Inhalte vermindert. Schülerinnen und Schüler können in relativ überschaubaren Bereichen Wissen und Fähigkeiten erwerben. Ferner haben die einzelnen Fächer und Fachgruppen jeweils spezifische Methoden der Erkenntnisgewinnung und der Theoriebildung. Schülerinnen und Schüler sollen diese fachbezogenen Denk- und Arbeitsweisen kennenlernen und einüben, um sie dann in komplexeren Zusammenhängen anwenden zu können.

Eine enge Beschränkung auf den Fachunterricht bringt allerdings auch Probleme mit sich.
Zum einen besteht die Gefahr, dass Schülerinnen und Schüler nur noch fachspezifische Facetten von Sachverhalten wahrnehmen. Selbst wenn in unterschiedlichen Fächern das gleiche Thema behandelt wird, stehen die jeweiligen Aspekte häufig unverbunden nebeneinander. Von Seiten der Lehrkräfte an Schulen und Hochschulen und auch von seiten der Wirtschaft wird diese Situation beklagt; man spricht von „Schubladenwissen“. Darüber hinaus begünstigt das Lernen isolierter Sachverhalte ein schnelles Vergessen des Gelernten.
Zum anderen erfordern die Wissensexplosion und der schnelle Wandel des Wissens, die komplexen Strukturen und Interdependenzen in allen Bereichen von Gesellschaft, Wirtschaft, Wissenschaft und Technik in zunehmendem Maß übergreifendes, vernetztes Denken. Viele aktuelle Probleme sind nicht allein analytisch durch Zerlegung in Teilprobleme und deren Lösung zu bewältigen. Es müssen vielfältige Abhängigkeiten und Verflechtungen berücksichtigt werden.

Das ist auch für den Unterricht relevant, soll er sich doch an der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler orientieren, zu Entscheidungs- und Handlungskompetenz führen und zur Übernahme von Verantwortung befähigen. Diese Ziele bedingen, dass in verstärktem Maß realitätsnahe Problemstellungen Ausgangspunkt von Lernprozessen sein müssen. Solche Problemstellungen lassen sich aber in der Regel nur im Zusammenwirken von Sachkompetenz aus mehreren Fachgebieten bewältigen. Kenntnisse und Fähigkeiten in den einzelnen Fächern sowie die Beherrschung der verschiedenen wissenschaftlichen Denkweisen und Arbeitsmethoden sind Voraussetzungen für die Bearbeitung fachübergreifender Problemstellungen.
Die Verfügbarkeit neuer Medien und Technologien erweitert die Möglichkeiten der Informationsbeschaffung und -verarbeitung und öffnet Wege zu einem übergreifenden Denken in Zusammenhängen.

2. Beiträge zur Methoden- und Sozialkompetenz

Im fachübergreifenden und fächerverbindenden Unterricht sollen die Schülerinnen und Schüler, zumindest exemplarisch,

- erfahren, dass für eine Lösung realitätsnaher Problemstellungen meist Aspekte aus verschiedenen Fächern zu berücksichtigen sind, die einander ergänzen bzw. gegeneinander abgewogen werden müssen,

- Wissen und methodische Fähigkeiten, die im Fachunterricht erworben wurden, als Beiträge zur Lösung eines komplexen Problems einbringen und dadurch die Bedeutung des Gelernten für die Bewältigung lebensweltlicher Situationen erfahren,

- lernen, eine Problemstellung von verschiedenen Seiten zu beleuchten und Lösungsansätze nicht vorschnell und unkritisch auf die Verfahren eines bestimmten Fachs einzuschränken,

- erfahren, dass die Zusammenführung verschiedener fachlicher Sichtweisen zu einem tieferen Verständnis eines Sachverhalts führen kann,

- die Bereitschaft und Fähigkeit entwickeln, zur Bearbeitung einer größeren, komplexen Problemstellung mit anderen zu kommunizieren und zu kooperieren,

- lernen, Problemlöseprozesse möglichst selbstständig zu organisieren, auch in Partnerarbeit oder im Team,

- lernen, die Ergebnisse eines Arbeitsprozesses zu strukturieren und so zu präsentieren, dass sie von anderen, die nicht an diesem Prozess beteiligt waren, verstanden werden können.

3. Lehrplanbezug

Die Lehrpläne schaffen äußere Voraussetzungen für die Realisierung fachübergreifenden und fächerverbindenden Unterrichts, indem

- keine verbindliche Reihenfolge für die Behandlung des Pflichtstoffs in den Fächern festgelegt wird,
- in gewissen Teilbereichen die Entscheidung über die inhaltlichen Schwerpunkte den Lehrerinnen und Lehrern bzw. den Fachkonferenzen überlassen bleibt,
- durch Beschränkung des Pflichtstoffs zeitliche Freiräume geschaffen werden,
- im Anhang Themenvorschläge für entsprechende Unterrichtseinheiten enthalten sind.

4. Verbindlichkeit

Fachübergreifendes Denken und Arbeiten soll grundsätzlich in der gesamten gymnasialen Oberstufe und in allen Fachkursen an geeigneten Stellen in den Unterricht integriert werden (vgl. 5.1).

Darüber hinaus sollen innerhalb der gymnasialen Oberstufe (Jahrgangsstufen 11 bis 13) alle Schülerinnen und Schüler mindestens einmal an einem fächerverbindenden Unterrichtsvorhaben teilnehmen.

5. Organisationsformen

Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen kann auf verschiedenen Ebenen erfolgen, die auch unterschiedliche Organisationsformen erfordern. Organisatorisch problemlos sind alle Formen fachübergreifenden und fächerverbindenden Lernens, die sich im Rahmen der Fachkurse realisieren lassen. Um übergreifende Themen behandeln zu können, die einen größeren zeitlichen Rahmen erfordern, oder zu denen mehrere Fächer etwa gleich gewichtige Beiträge liefern, ist es jedoch erforderlich, für den entsprechenden, begrenzten Zeitraum neue, an den Themen orientierte Lerngruppen zu bilden. Dies ist in der gymnasialen Oberstufe auf Grund der differenzierten Kursbelegung nicht immer leicht zu organisieren. Welche Organisationsform die günstigste ist, muss anhand der speziellen Rahmenbedingungen an der einzelnen Schule entschieden werden.

Im Folgenden sind exemplarisch mögliche Organisationsformen für fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen im Rahmen der Fachkurse wie auch in neu gebildeten Lerngruppen aufgeführt. Selbstverständlich sind auch andere als die hier genannten Formen möglich.

5.1 Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen **im Rahmen der Fachkurse**

- Die Lehrerinnen und Lehrer integrieren in den Fachunterricht an geeigneten Stellen Aspekte anderer Fächer oder Fachbereiche – insbesondere derjenigen, für die sie die Lehrbefähigung besitzen.

- Durch die Einbeziehung außerschulischer Lernorte (z.B. im Rahmen von Exkursionen) werden der Anwendungsbezug und die fachübergreifende Dimension des jeweiligen Themas für die Schülerinnen und Schüler unmittelbar erfahrbar.

- In bestimmten Unterrichtsabschnitten übernimmt eine zweite Lehrkraft allein oder zusammen mit der Fachlehrkraft den Unterricht (team-teaching). Auch können Vorträge von externen Fachleuten in den Unterricht integriert werden, um Bezüge zu anderen Fachrichtungen aufzuzeigen.

- Kurse verschiedener Fächer, die im Stundenplan parallel liegen, werden für mehrere Stunden zur Durchführung eines fächerverbindenden Projekts zusammengefasst. Der fächerverbindende Unterricht tritt für diesen Zeitraum an die Stelle des Fachunterrichts.

5.2 Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen **in hierfür neu gebildeten Lerngruppen**

- Für eine „Projektphase“, die mehrere Tage umfasst, werden die Schülerinnen und Schüler einer Jahrgangsstufe in neue Lerngruppen eingeteilt. In jeder dieser Lerngruppen wird ein fächerverbindendes Thema behandelt. Es ist denkbar, dass in einer Lerngruppe eine einzige Lehrkraft alle Aspekte des Themas behandelt, aber auch, dass im zeitlichen Wechsel oder im team-teaching mehrere Lehrkräfte beteiligt sind.

- Über ein Schuljahr oder ein Halbjahr hinweg wird jeweils eine Doppelstunde pro Woche für alle Schülerinnen und Schüler einer Jahrgangsstufe von Fachunterricht freigehalten. Diese Doppelstunde steht für fächerverbindenden Unterricht in dafür neu gebildeten Lerngruppen zur Verfügung.

Die Teilnahme daran kann für die Schülerinnen und Schüler über den Pflicht-Fachunterricht hinaus verbindlich gemacht werden. Die so durchgeführten fächerverbindenden Unterrichtsprojekte müssen sich nicht über ein ganzes Halbjahr erstrecken, sie können auf wenige Wochen beschränkt sein.

- Ein fächerverbindendes Thema wird in einer dafür neu gebildeten Lerngruppe über einen bestimmten Zeitraum mit einer Doppelstunde pro Woche unterrichtet. Der für diese Doppelstunde vorgesehene Fachunterricht fällt jeweils aus. Die Doppelstunde liegt aber in jeder Woche an einer anderen Stelle im Stundenplan, so dass nicht immer der gleiche Fachunterricht betroffen ist.

- In einer Jahrgangsstufe sprechen sich einige Lehrerinnen und Lehrer verschiedener Fächer ab, ein ausgewähltes übergreifendes Thema zeitlich parallel in ihren Kursen unter fachlichem Aspekt zu behandeln. Der zeitliche Rahmen kann einige Stunden umfassen, sich aber auch auf mehrere Wochen erstrecken. Am Ende dieses Zeitraums finden „Projekttage“ statt, auf denen allen Schülerinnen und Schülern die Ergebnisse der fachbezogenen Arbeit vorgestellt werden. In dieser Präsentation, in die auch externe Fachleute einbezogen werden können, wird der fächerverbindende Charakter des Themas erfahrbar.

Anhang

Themenvorschläge und Anregungen für fachübergreifende und fächerverbindende Unterrichtseinheiten

Im Folgenden sind mehrere Themenbereiche für fachübergreifende und fächerverbindende Unterrichtsvorhaben aufgeführt. Für jeden Themenbereich sind in Form von Bausteinen thematische Schwerpunkte genannt, die sich für eine Zusammenarbeit von Mathematik mit anderen Fächern eignen und es gestatten, fachübergreifende Leitlinien und Vernetzungen aufzuzeigen.
Die Auswahl der Themenbereiche und thematischen Bausteine richtet sich u.a. danach, ob ein Bezug zu den Fachlehrplänen der jeweils betroffenen Fächer hergestellt werden kann und ob bereits gewisse methodische Erfahrungen vorliegen oder Handreichungen zur Verfügung stehen.

Die aufgeführten Themen sind nicht verbindlich. Sie sind als Beispielsammlung gedacht und erheben in keiner Weise den Anspruch auf Vollständigkeit.

Die Themenvorschläge und die aufgezeigten Bezüge verschiedener Fächer zu dem jeweiligen Rahmenthema sollen anregen und ermuntern, fachübergreifende und fächerverbindende Unterrichtseinheiten zu planen, zu erproben und Erfahrungen zu sammeln. In der Regel werden Fachlehrerinnen und -lehrer verschiedener Fächer kooperieren und ihre jeweilige Sachkompetenz bei der Planung und Durchführung eines Unterrichtsvorhabens einbringen.

Umfang und Komplexität eines solchen Vorhabens werden sich an der zur Verfügung stehenden Zeit und den Möglichkeiten der Realisierung orientieren. Auch kleinere Projekte, an denen außer Mathematik nur ein oder zwei weitere Fächer beteiligt sind und bei denen nur einige der für das jeweilige Fach aufgeführten „möglichen Beiträge“ berücksichtigt werden, können der Zielsetzung des fachübergreifenden und fächerverbindenden Unterrichts gerecht werden.

Vorbemerkung zu den Themenvorschlägen 1. und 2.:
Deterministisches Chaos und Fraktale sind fachlich eng miteinander verknüpft. Dennoch werden im Folgenden zu diesem Themenkomplex *zwei* Unterrichtsvorhaben beschrieben, die sich in der Schwerpunktsetzung unterscheiden, „Chaotische Prozesse“ und „Fraktale“.

1. Chaotische Prozesse

Im Mittelpunkt einer Unterrichtseinheit zum Thema „Chaotische Prozesse“ sollte die Untersuchung und Erklärung des Verhaltens ausgewählter chaosfähiger Systeme stehen. Als Beispiele sind vor allem physikalische oder biologische Prozesse geeignet. Anhand experimenteller Befunde können charakteristische Eigenschaften des Chaos und Wege ins Chaos erkannt werden. Zur Erklärung chaotischer Prozesse werden mathematische Begriffe und Verfahren benötigt, z.B. Rekursionen (Iterationen), Differentialgleichungen und deren numerische Lösung sowie die Interpretation von Graphen. Darüber hinaus können wissenschaftstheoretische und weltanschaulich-philosophische Fragen thematisiert werden, z.B. anknüpfend an die beobachtete Verletzung der starken Kausalität.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für drei weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fachübergreifenden Unterrichtsvorhabens „Chaotische Prozesse“ ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden. Es ist auch möglich, nur einzelne der für das jeweilige Fach aufgeführten „möglichen Beiträge“ herauszugreifen und in einem kleineren fachübergreifenden Projekt zu bearbeiten.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Rekursive Folgen	Rekursive Folgen gehören im Grund- und Leistungsfach zum Pflichtstoff
Logistische Gleichung	Die logistische Gleichung kann behandelt werden ▪ als spezielles Beispiel einer rekursiven Folge ▪ als Gleichung zur Beschreibung spezieller Wachstumsprozesse, anknüpfend an das exponentielle Wachstum
Sensitivität	Beschreibung des exponentiellen Fehlerwachstums, Ljapunov-Exponent
Feigenbaumdiagramme	Darstellungform, die die Wege ins Chaos sichtbar werden lässt

Mögliche Beiträge des Fachs Physik	
Schwingungsvorgänge	Beobachtung chaotischen Verhaltens bei Schwingungen
Beschreibung von Schwingungen durch Differentialgleichungen	Beschreibung von Schwingungen durch Differentialgleichungen Im Lehrplan Mathematik gehören Differentialgleichungen und ihre numerische Lösung zum Pflichtstoff im Leistungsfach.
Bifurkationen; Chaos	Untersuchung der Abhängigkeit von Kontrollparametern, Analyse von Weg-Zeit- bzw. Winkel-Zeit-Diagrammen
Sensitivität	Beobachtung der Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen
Feigenbaumdiagramme	Darstellungsform, die eine Untersuchung der Wege ins Chaos ermöglicht
Paradigmenwechsel in der Wissenschaftstheorie	▪ Nichtlineare Systeme ▪ Verletzung der starken Kausalität ▪ Abgrenzung des Begriffs „deterministisches Chaos“ gegen das umgangssprachliche Verständnis von Chaos

Mögliche Beiträge des Fachs Biologie	
Populationsentwicklung, Zeitreihen, Logistisches Wachstum	Beispiele für natürliche Entwicklungsprozesse, die durch logistisches Wachstum modelliert werden können
Bifurkationen; Chaos	Untersuchung der Abhängigkeit einer Populationsentwicklung von den jeweiligen Parametern
Sensitivität	Beobachtung der Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen
Paradigmenwechsel in der Wissenschaftstheorie	Grenzen der Vorhersagbarkeit

Mögliche Beiträge des Fachs Religion/Ethik/Philosophie	
Chaos Wandel der Interpretation des Begriffs Chaos in der Philosophiegeschichte	Wandel der Interpretation des Begriffs Chaos in der Philosophiegeschichte
Paradigmenwechsel im Weltbild	Möglicher Paradigmenwechsel in der Wissenschaftstheorie – analoge philosophische Strömungen und Weltbilder

2. Fraktale

Im Mittelpunkt einer Unterrichtseinheit zu diesem Thema steht die Beobachtung, Beschreibung und Erzeugung fraktaler Strukturen. An natürlichen Objekten aus Physik, Chemie, Biologie und Erdkunde können solche Strukturen beobachtet werden; durch Iteration können Fraktale systematisch erzeugt werden. Die entsprechenden Algorithmen führen in Mathematik bzw. Informatik zu einem tieferen Verständnis. Zur qualitativen und quantitativen Beschreibung sind die mathematischen Begriffe Selbstähnlichkeit und fraktale Dimension geeignet. Ein weiterer Aspekt des Themas kann durch die Analyse künstlerischer Werke, in denen von der Selbstähnlichkeit als Gestaltungsmittel Gebrauch gemacht wird, einbezogen werden.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für vier weitere Fächergruppen Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fachübergreifenden Unterrichtsvorhabens „Fraktale" ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich alle diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur einem anderen Fach durchgeführt werden. Es ist auch möglich, nur einzelne der aufgeführten „möglichen Beiträge" herauszugreifen und diese aus der Sicht verschiedener Fächer zu betrachten.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Iterationen	Die Iteration ist ein Grundelement der fraktalen Geometrie. Der Lehrplan sieht vor, dass Erfahrungen mit Iterationen unter anderem gewonnen werden im Zusammenhang mit rekursiven Folgen, numerischen Verfahren zur Nullstellenbestimmung und zum Lösen von Differentialgleichungen.
Erzeugung von Fraktalen durch geometrisch-konstruktive Iteration	Beispiele: Sierpinski-Dreieck, Schneeflockenkurve, Menger-Schwamm
Iterationen mit komplexen Zahlen	Beispiele: Julia-Mengen, Mandelbrot-Menge
Iterierte Funktionensysteme	Hier kann unmittelbar an die Verkettung affiner Abbildungen angeknüpft werden, wenn im Mathematikunterricht das Wahlpflichtgebiet „Geometrische Abbildungen und Matrizen" (Grundfach) bzw. „Vektoren und Matrizen" (Leistungsfach) gewählt wurde.
Selbstähnlichkeit	Erkennen und Untersuchen einer zentralen Eigenschaft von Fraktalen
Fraktale Dimension	Quantifizierung von Selbstähnlichkeit; Möglichkeit, den Grad der Komplexität fraktaler Strukturen zu messen

Mögliche Beiträge der Fächer Physik / Chemie	
Fraktale Strukturen an physikalischen und chemischen Objekten	Fraktale Strukturen an physikalischen und chemischen Objekten Beobachtung, Beschreibung und Erzeugung fraktaler Strukturen, die in physikalischen oder chemischen Experimenten erzeugt werden
Selbstähnlichkeit	Qualitative Erfassung fraktaler Strukturen, Ausblick auf die Bedeutung in der wissenschaftlichen Forschung

Mögliche Beiträge der Fächer Biologie / Erdkunde	
Fraktale Strukturen in der Natur	Beobachtung und Beschreibung fraktaler Strukturen an biologischen oder geographischen Naturgebilden
Selbstähnlichkeit	Vorbereitung des Begriffs der fraktalen Dimension, Ausblick auf die Bedeutung in der wissenschaftlichen Forschung

Mögliche Beiträge des Fachs Bildende Kunst	
Fraktale Strukturen in künstlerischen Werken	Selbstähnlichkeit als Gestaltungsmittel in der Kunst, vor allem in der surrealistischen
Selbstähnlichkeit	Vergleich mit selbstähnlichen Figuren in der Natur und in der Mathematik

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik	
Algorithmen zur Erzeugung fraktaler Strukturen	Algorithmen zu Rekursionen und Iterationen, die fraktale Gebilde erzeugen
Selbstähnlichkeit	Entwickeln des Begriffs aus dem Algorithmus

3. Darstellung räumlicher Objekte

Im Mittelpunkt einer Unterrichtseinheit zu diesem Thema steht die Frage, mit welchen Mitteln bei der zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte ein räumlicher Eindruck erzeugt werden kann. Verschiedene Fächer können zur Beantwortung dieser Frage jeweils unterschiedliche Beiträge leisten. Das Fach Mathematik stellt Verfahren zur zeichnerischen Darstellung räumlicher Objekte und die rechnerische Erfassung von Abbildungen durch Matrizen bereit. Daran anknüpfend können im Fach Informatik die entsprechenden Datenstrukturen und Algorithmen thematisiert werden. Die Vektorgrafik kann als Möglichkeit der Bilderzeugung angesprochen werden. Im Fach Bildende Kunst werden an ausgewählten Kunstwerken die Darstellungsverfahren unter künstlerischen Gesichtspunkten betrachtet; darauf aufbauend können weitere Möglichkeiten zur Raumdarstellung und Perspektive entdeckt werden.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für zwei weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens „Darstellung räumlicher Objekte" ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich alle diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur einem anderen Fach durchgeführt werden.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Darstellung räumlicher Objekte im Schrägbild	Aufbauend auf Erfahrungen mit Schrägbildern in der Sekundarstufe I und auf der zeichnerischen Darstellung vektoriell gegebener Geraden und Ebenen im Raum können Eigenschaften von Schrägbildern bewusst gemacht und bei der Analyse von Bildern angewendet werden.
Beschreibung von Kongruenzabbildungen im Raum durch Vektoren und Matrizen	Im Hinblick auf die Computergrafik vor allem: Drehungen von Körpern im Raum um geeignete Achsen
Parallelprojektionen	Entstehung von Schrägbildern bzw. Rissen durch Parallelprojektion; Darstellung von Parallelprojektionen durch Matrizen; Möglichkeit der Anbindung an Erfahrungen mit Abbildungsmatrizen
Zentralprojektion	Konstruktion; Eigenschaften

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik	
Algorithmen, Datenstrukturen, Programmieren	Darstellung räumlicher Objekte auf dem Computer
Koordinatensysteme und Transformationen	3-D-Weltsystem, 3-D-Clipping, 3-D-Betrachtersystem, 2-D-Projektionssystem, Bildschirmkoordinaten
Animationen	Effiziente Algorithmen, verschiedene Bildschirmseiten
Verdeckte Linien	Geeignete Darstellung geometrischer Objekte

Mögliche Beiträge des Fachs Bildende Kunst	
Raumwahrnehmung und Raumdarstellung	Raumdarstellungen und Perspektive in verschiedenen Epochen
Perspektive	Verschiedene Arten der Perspektive

4. Simulation dynamischer Vorgänge

Im Mittelpunkt einer Unterrichtsreihe zu diesem Thema steht die mathematische Modellierung dynamischer Systeme, die es erlaubt, die entsprechenden Abläufe zu simulieren. Aus der Simulation können Aussagen über Abhängigkeiten zwischen Systemgrößen oder über das zeitliche Verhalten des Systems gewonnen werden, die wegen der Vernetzung nicht direkt abzulesen sind. Beispiele für solche komplexen dynamischen Systeme finden sich vor allem in den Naturwissenschaften und im gemeinschaftskundlichen Bereich. Diese Fächer stellen das Sachwissen zur Verfügung, das zur Modellierung der Prozesse und zur Auswertung der Ergebnisse von Simulationen unverzichtbar ist. Das Fach Mathematik stellt die Verfahren für die Modellierung bereit, insbesondere verschiedene Funktionstypen, den Ableitungsbegriff, die Beschreibung dynamischer Prozesse durch Differenzen- oder Differentialgleichungen und deren numerische Lösung. Für die Darstellung und Durchführung der Simulationen bieten sich in allen Fächern grafische Modellbildungssysteme an. Darüber hinaus kann im Fach Informatik die algorithmische Struktur solcher Systeme analysiert werden.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für vier weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens „Simulation dynamischer Vorgänge" ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Mathematische Modellierung	Mathematische Modellierung Prozess der Modellbildung (vgl. Kapitel „Problemlösen mit mathematischen Methoden – Modellbildung")
Funktionale Zusammenhänge, Eigenschaften von Funktionen	Funktionale Zusammenhänge, Eigenschaften von Funktionen
Differenzen- bzw. Differentialquotient	Interpretation des Differenzen- bzw. Differentialquotienten als mittlere bzw. momentane Änderungsrate
Differenzengleichungen, Differentialgleichungen	Differenzengleichungen können im Zusammenhang mit rekursiven Folgen angesprochen werden; Differentialgleichungen werden im Leistungskurs behandelt.
Iterationen, numerische Lösungsverfahren für Differentialgleichungen	

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik	
Handhabung und Analyse grafischer Modellbildungssysteme	Grafische Modellbildungssysteme als ein möglicher Zugang zu Algorithmen
Neuronale Netze	Untersuchung neuronaler Netze als ein mögliches Projektthema

Mögliche Beiträge des Fachs Physik	
Beschreibung einer zeitlichen Entwicklung durch Differenzen- oder Differentialgleichungen	z.B. Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung
Komplexe mechanische und elektrische Schwingungsvorgänge	z.B. gekoppelte Pendel, Feder-Faden-Pendel, Schwingungen mit großer Amplitude, gedämpfter elektromagnetischer Schwingkreis
Fall- und Wurfbewegungen	Untersuchung der Bewegungen unter Berücksichtigung des Luftwiderstands
Radioaktiver Zerfall	Zerfallsgesetz, Gleichgewicht der Zerfallsprodukte, radiometrische Altersbestimmung
Kepler-Ellipsen	Gewinnung der Keplerschen Gesetze aus den Newtonschen Bewegungsgesetzen und dem Gravitationsgesetz durch Simulation
Energieflüsse bei physikalischen Prozessen	
Simulation als Methode der Erkenntnisgewinnung	Schrittweise Korrektur des Modells durch Vergleich der Simulationsergebnisse mit experimentellen Befunden

Mögliche Beiträge des Fachs Biologie	
Möglichkeiten der Beschreibung von zeitlichen Entwicklungen	z.B. Wirkungsdiagramme, Änderungsraten (Differenzenquotient), Differenzengleichungen
Populationsentwicklungen	z.B. lineare, exponentielle, beschränkte, logistische Wachstums- bzw. Abnahmeprozesse
Konkurrenz zweier Populationen	z.B. Verdrängung einer Population durch die andere, Koexistenz zweier Populationen, Räuber-Beute-Systeme
Komplexe Ökosysteme	
Konzentrationsentwicklungen	z.B. Hormonspiegel, Nikotinkonzentration im Blut, Blutalkohol, Sauerstoffgehalt in der Raumluft; Untersuchung der Abhängigkeit von verschiedenen Einflüssen
Bakterien und Antikörper, Verlauf einer Epidemie	

Mögliche Beiträge des Fachs Gemeinschaftskunde	
Möglichkeiten der Beschreibung von zeitlichen Entwicklungen	z.B. Wirkungsdiagramme, Änderungsraten (Differenzenquotient), Differenzengleichungen
Bevölkerungsentwicklung, Ressourcenentwicklung	Bevölkerungsentwicklung, Ressourcenentwicklung Verschiedene Modelle, Prognosen
Wirtschaftssysteme, Ökosysteme	Prognosen über das zeitliche Verhalten komplexer Öko- und Wirtschaftssysteme und über deren Abhängigkeit von verschiedenen Faktoren

5. Monte-Carlo-Methoden

Im Mittelpunkt einer Unterrichtsreihe zu diesem Thema steht die Erarbeitung von stochastischen Simulationen zum Lösen von Anwendungsproblemen.
Während es Sache der Mathematik ist, die grundlegende Struktur solcher Methoden und ihre Einbettung in die Theorie aufzuzeigen, stellen die naturwissenschaftlichen und gemeinschaftskundlichen Fächer das den Anwendungen zugrundeliegende Sachwissen bereit. Das Fach Informatik schafft die Voraussetzungen zur Übertragung der Simulationen auf den Computer; eine Problematisierung der algorithmischen Erzeugung von Pseudozufallszahlen kann als weiterer Beitrag des Fachs Informatik zu einer Unterrichtsreihe gesehen werden.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für vier weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens „Monte-Carlo-Methoden“ ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich alle diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur einem anderen Fach durchgeführt werden, indem nur Sachprobleme aus diesem Fach zugrundegelegt werden.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Mathematische Modellierung	Prozess der Modellbildung (vgl. Kapitel „Problemlösen mit mathematischen Methoden – Modellbildung“)
Simulation von Zufallsexperimenten	Die Simulation von einfachen Zufallsexperimenten gehört im Leistungsfach zum Pflichtstoff, im Grundfach ist sie Thema des Wahlpflichtbereichs „Simulation von Zufallsrexperimenten“.
Lösung spezieller Sachprobleme mit Hilfe stochastischer Simulationen	z.B. Warteschlangen, Markowketten

Mögliche Beiträge des Fachs Biologie	
Diffusion	Passive Transportvorgänge in biologischen Systemen
Vererbung	Mendelsche Regeln
Evolution	Mutation, Selektion, Isolation, Genfluss, Gendrift, Rekombination

Mögliche Beiträge des Fachs Physik	
Streuversuche	z.B. Streuversuch von Rutherford
Radioaktiver Zerfall	z.B. Deutung von Zerfallskurven
Dualismus Welle - Teilchen	Deutung der Wellenfunktion durch Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, z.B. am Interferenzbild beim Doppelspalt
Gaskinetik	Druck, Temperatur, Geschwindigkeitsverteilung

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik	
Algorithmen, Datenstrukturen, Programmieren	Durchführung stochastischer Simulationen am Computer
Zufallszahlen	Verfahren zum Erzeugen und Testen von Pseudozufallsziffern

Mögliche Beiträge des Fachs Gemeinschaftskunde	
Planungsprozesse	z.B. Verkehrsplanungen, Größe eines Hafens, Kapazität eines Nachrichtennetzes

6. Das Problem des Unendlichen

In einem Projekt, das das Problem des Unendlichen in den Mittelpunkt stellt, soll für die Schülerinnen und Schüler erfahrbar werden, dass sich die Bedeutung der Mathematik als Wissenschaft nicht auf den Anwendungsbezug reduzieren lässt. So ist eine Zuordnung der Mathematik zu den Naturwissenschaften nur die halbe Wahrheit. Mathematik ist genau so gut eine Geisteswissenschaft; seit eh und je bestehen enge Bezüge zur Philosophie. Dies kann für Schülerinnen und Schüler deutlich werden, wenn sie erkennen, wie sich Philosophen und Mathematiker im Laufe der Geistesgeschichte mit dem Begriff des Unendlichen auseinandergesetzt haben.
Die Frage nach dem Unendlichen führt auch zu Grundfragen naturwissenschaftlichen Erkennens und naturwissenschaftlicher Methoden. Hier rückt vor allem die Physik in den Blick. So lassen sich je nach gewünschter Schwerpunktsetzung ganz unterschiedliche Facetten zu einem Projekt zusammensetzen.

Das Problem des Unendlichen übt auf Schülerinnen und Schüler in der Regel eine große Faszination aus. Häufig sind es die Paradoxien, die vermeintliche Sicherheiten aufbrechen und zu tiefergehenden Fragen führen. Im Mittelpunkt des Projekts soll deshalb auf keinen Fall eine Darstellung verschiedener Theorien, mathematischer Definitionen und naturphilosophischer Aussagen stehen. Vielmehr sollten aus einer Betroffenheit der Schülerinnen und Schüler heraus Perspektiven erarbeitet werden, wie man in unterschiedlichen Epochen einerseits und in den verschiedenen Wissenschaften andererseits versucht, sich geistig mit der Herausforderung des Unendlichen auseinanderzusetzen.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für drei weitere Fächergruppen Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens „Das Problem des Unendlichen“ ist es jedoch nicht erforderlich, daß sich *alle* Fächer beteiligen und *alle* aufgeführten Themen und Aspekte behandelt werden. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur einem anderen Fach durchgeführt werden. Es ist auch möglich, nur einen einzigen der genannten Aspekte aufzugreifen und diesen aus der Perspektive der verschiedenen Fächer zu beleuchten.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Grenzwert von Folgen und reellen Funktionen für $x \to \infty$	Intuitives Erfassen von Grenzprozessen Paradoxien des Unendlichen, die intuitiv gewonnene Sicherheiten in Frage stellen Inhaltliche Vorstellungen von dem Prozeß des unendlichen Fortschreitens und Grenzen des Vorstellungsvermögens Stufen der mathematischen Präzisierung des Grenzwertbegriffs Einsicht, daß ∞ keine reelle Zahl ist

Das Prinzip der vollständigen Induktion	
Mengen mit unendlich vielen Elementen	Gibt es unendlich viele Primzahlen/Primzahlzwillinge? Gleichmächtigkeit von Mengen Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit; transfinite Kardinalzahlen Das aktual Unendliche im Vergleich zum potentiell Unendlichen
Inkommensurabilität und Irrationalität; Lückenlosigkeit der Menge der reellen Zahlen; Kontinuum	Das Problem der unbegrenzten Teilbarkeit
Erweiterung des euklidischen Raums zum projektiven Raum	Einführung uneigentlicher (unendlich ferner) Punkte und Geraden

Mögliche Beiträge der Fächer Physik / Astronomie	
Größenordnungen in der Natur; der Aufbau der Materie; die Idee des Elementaren	Eine Reise durch den Mikro- und Makrokosmos Grundfragen der Menschheit – naturwissenschaftliche Antworten
Probleme mit den Begriffen „unendlich kleine Größen“ und „unbegrenzte Teilbarkeit“; Singularitäten	Beschreibung physikalischer Gesetze mit Hilfe der Infinitesimalrechnung Begriff des Differentials in Physik und Mathematik
Struktur und physikalische Evolution des Kosmos; Expansion des Universums; Vorstellungen zur Raumzeit als geschlossene Fläche ohne Begrenzung	„Planckzeit“ und „Plancklänge“ als kleinste Größen sinnvoller physikalischer Theoriebildung Urknalltheorie; Hintergrundstrahlung; Hubble-Gesetz; Weltalter

Mögliche Beiträge der Fächer Philosophie / Religion	
Die Paradoxien der Eleaten	
Die Unterscheidung von potentiell unendlich und aktual unendlich bei Aristoteles	Potentiell unendlich: Das unendliche Fortschreiten in der Zeit; die unendliche Teilung räumlicher Größen Aktual unendlich: Das Ergebnis des unendlichen Fortschreitens (z.B. Exhaustion einer Fläche) bzw. einer unendlichen Teilung (z.B. Durchlaufen einer Strecke aus unendlich vielen Teilstrecken)
Das Unendliche in Mathematik, Philosophie und Theologie bei Nikolaus von Cues	Mathematik als Sinnbild theologischer Aussagen Das Verhältnis des Unendlichen zum Endlichen in Mathematik und Theologie (coincidentia oppositorum) Aufbrechen der mittelalterlichen christlichen Vorstel-lungen von der Endlichkeit der Welt
Theorien zur Unendlichkeit von Raum und Zeit in der Neuzeit	
Endlichkeit und Unendlichkeit als dialektische Einheit (Hegel)	
Cantors metaphysische Deutung des Aktual-Unendlichen	Briefwechsel mit Kardinal Franzelin, Halle 1886

Mögliche Beiträge des Fachs Deutsch	
Passagen in der deutschen Literatur, in denen das Unendliche thematisiert wird	Beispiel: Musils Roman Die Verwirrungen des Zöglings Törleß

7. Argumentieren und Beweisen

Im Mittelpunkt dieser Unterrichtsreihe steht die Betrachtung logischer Strukturen beim Argumentieren, Begründen und Beweisen in verschiedenen Fachgebieten. Daran anknüpfend kann das Verhältnis zwischen natürlicher Sprache und wissenschaftlicher Terminologie thematisiert werden.

Die Analyse der logischen Struktur von mathematischen Sätzen, Satzsystemen und ihrer Beweise führt zu einem tieferen Verständnis des Aufbaus der Mathematik als Wissenschaft und sie erleichtert es, mathematische Sätze zu verstehen, Beweisansätze zu finden und einen Beweis zielgerichteter zu führen. Der Vergleich mit dem Definieren, Begründen und Beweisen in anderen Fächern zeigt gemeinsame logische Strukturen auf, fördert damit die Fähigkeit zu folgerichtigem Argumentieren und verhilft zu der Einsicht, sich an einmal getroffene Vereinbarungen zu halten.

Das Verhältnis zwischen natürlicher Sprache und wissenschaftlicher Terminologie ist unter anderem durch kontextabhängige Begriffe einerseits und kontextfreie Definitionen andererseits gekennzeichnet. Während in der Sprache des alltäglichen Umgangs ein Wort seine Bedeutung insbesondere durch Sätze erhält, in denen es vorkommt, benötigt die Sprache der Wissenschaft kontextfreie Wortbedeutungen. Sie weist im Gegensatz zur natürlichen Sprache, zumindest in Teilbereichen, Merkmale formaler Systeme auf. Am Beispiel der Sprache der Mathematik läßt sich das besonders gut verdeutlichen, da sie, wie kaum eine andere Wissenschaftssprache, durch die formale Logik geprägt ist.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und drei weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema „Argumentieren und Beweisen“ leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, daß sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden. Es ist auch möglich, nur einzelne der aufgeführten „möglichen Beiträge“ herauszugreifen und diese aus der Sicht verschiedener Fächer zu betrachten.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Mathematische Sätze und ihre logische Struktur	Analyse der Struktur mathematischer Sätze mit den Mitteln der Aussagen- und Prädikatenlogik
Direkter Beweis	Beweis von Implikationen und Äquivalenzaussagen, Umkehrbarkeit von Aussagen
Indirekter Beweis	Logische Struktur eines indirekten Beweises, Negationen von Implikationen und Äquivalenzen, Negation von Allaussagen und Existenzaussagen
Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit in Axiomensystemen, Paradoxien	Russelsches Paradoxon, Satz von Gödel

Mögliche Beiträge des Fachs Philosophie	
Grundsätze der Ontologie	Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Satz vom Widerspruch, Satz der Identität
Aussagenlogik	Satz, Aussage, Aussageform, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz, Wahrheitswert
Prädikatenlogik	Subjekt, Prädikat, Allaussage, Existenzaussage, Negation
Syllogistik	Satz, Urteil, Urteilsarten, Prämissen, Formalisierung, Deduktion, Induktion, Richtigkeit
Formale Systeme und natürliche Sprache	Kontextfreiheit und Kontextsensitivität, Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit

Mögliche Beiträge des Fachs Deutsch	
Elemente der Sprachanalyse	Semantik, Denotation, Konnotation, Satzgrammatik, Ersatzprobe, Umstellprobe
Analyse argumentativer Texte auf ihre logische Struktur	Gültigkeit, Stringenz und Schlüssigkeit von Argumenten und deren Beurteilung
Tautologien und selbstbezügliche Aussagen	Tautologien als Mittel rhetorischer Verstärkung, Bestätigungs- und Leerformeln, Paradoxien
Grenzen logischen Argumentierens	„analytische“ und „substantielle“ Argumentation, Scheinlogik Grenzen des Syllogismus, Unterscheidung formale Logik und Alltagsargumentation, Bedeutung der Kommunikationssituation (Watzlawick)

Mögliche Beiträge des Fachs Religion	
(philosophische) Gottesbeweise	Argumente für und gegen Gott
Religionskritik	Problem der Rechtfertigung Gottes, Analyse religionsphilosophischer Quellen

8. Gotische Maßwerke

Eine Unterrichtsreihe zu diesem Thema widmet sich der Erzeugung, der Analyse und der Interpretation gotischer Maßwerkfenster. Das Thema ist wie kaum ein anderes geeignet, exemplarisch zu zeigen wie ein Kunstwerk unter Einbeziehung vielfältiger philosophisch-religiöser, historischer, kunstgeschichtlicher und mathematischer Aspekte verstanden, interpretiert und „erlebt“ werden kann. Ein breitgefächert arbeitsteiliges Vorgehen ist leicht möglich.

Obwohl das Konstruieren mit Zirkel und Lineal für dieses Thema sicher grundlegend ist, so ist es doch oft mühsam und mit der erforderlichen Genauigkeit kaum durchführbar. Erst die rechnerische Durchdringung schafft die Voraussetzungen, Konstruktionen auf den Computer zu übertragen. So werden auch umfangreiche Rosettenfenster, Friese oder ganze Fassaden „konstruierbar“. Das moderne Hilfsmittel ermöglicht mit seiner Präzision das „mittelalterliche Erleben“ einer exakten Konstruktion in ihrer Ganzzahligkeit und oft genialen Einfachheit. Auch lässt sich für manche schwierige Konstruktion rechnerisch nachprüfen, ob sie wirklich das leistet, was sie vorgibt. Umgekehrt ermöglicht die Rechnung oft das Finden einer Konstruktionsmöglichkeit. Die Notwendigkeit, geometrische Abbildungen wie Verschiebung, Drehung, Streckung rechnerisch zu beschreiben, wird augenscheinlich. Computergrafische Grundlagen lassen sich am begrenzten Problem beziehungsreich vermitteln.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für fünf weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens „Gotische Maßwerke“ ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden, auch wenn dadurch nur einzelne der „möglichen Beiträge“ berücksichtigt werden.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Analytische Geometrie in der Ebene	Geometrische Konstruktionen und rechnerisches Nachbilden, Beschreibung von Kreisbögen mit Winkelfunktionen
Verschiebung, Drehung, zentrische Streckung (Skalierung)	Geometrische Abbildungen, Matrizen, Transformation auf ein anderes Koordinatensystem

Mögliche Beiträge der Fächer Religion / Ethik / Philosophie	
Religiöser Hintergrund der Gotik	Neuplatonismus, Reinheit von Konstruktion und Proportion, Harmonie des Kosmos, Symbolik

Mögliche Beiträge des Fachs Geschichte	
Lebensformen und Denkweisen im Mittelalter	Einheitlichkeit und Geschlossenheit des Weltbildes, zentrale Bedeutung der christlichen Lehre, Bedeutung der Sakralbauten, heimische Kirchen

Mögliche Beiträge des Fachs Bildende Kunst	
Gotik als Kunstepoche	Differenz der Raumstrukturen in romanischer und gotischer Baukunst, Architektur als Zeichensystem und Bedeutungsträger
Hermeneutisches Verstehen von Kunstwerken	Kunstgeschichte als Motivgeschichte
Kunstgeschichte als Motivgeschichte	Computer als visuelles Medium Verknüpfung von ästhetischen Momenten mit High-Tech-Möglichkeiten

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik	
Algorithmen, Datenstrukturen, Programmieren	Darstellung zweidimensionaler Objekte auf dem Computer
Grundlagen der Computergrafik	Weltsystem, Bildsystem, Transformationen

Mögliche Beiträge des Fachs Geschichte	
Statik in der Gotik	Romanische und gotische Gewölbe, Strebepfeiler u.a.

Notizen:

Rheinland-Pfalz

MINISTERIUM FÜR BILDUNG,
WISSENSCHAFT, WEITERBILDUNG
UND KULTUR

Mittlere Bleiche 61
55116 Mainz

poststelle@mbwwk.rlp.de
www.mbwwk.rlp.de

IMPRESSUM

Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Weiterbildung und Kultur (Hrsg.)
Mittlere Bleiche 61
55116 Mainz
Tel.: 0 61 31 / 16 0 (zentraler Telefondienst)
Fax: 0 61 31 / 16 29 97
E-Mail: poststelle@mbwwk.rlp.de
Web: www.mbwwk.rlp.de

Redaktion: Barbara Mathea

Erscheinungstermin: Oktober 2014